

# 案例：如何用ai帮助AI复习考研

1. 用AI解以往考研难题，遵循步骤
- 2.
3. 用笔和纸抄下来，并理解之，注意题目内容分解，将一个大问题分成几个小问题，将假设条件一个一个分清楚
- 4.
5. 沿用钱学森卷面风格，描红，成习惯，然后运用，记住，要多用手写练习



# 这道题的题目是、以及给出的指令是

$$\text{计算 } I = \int_{-1}^1 dx \int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} y \sin \sqrt{x^2 + y^2} dy.$$

请解出以上的高数题。

1. 步骤要尽可能的详细，包含各个步骤。
  2. 样式要和考生写卷子的样式一样。
  3. 要分出层次，分出条理。
  4. 逻辑上要严谨，
  5. 步骤要清晰，
- 总之步骤要多，越详细越好。

[Ai的解题的网站是豆包  
在这里。https://www.doubao.com/chat/](https://www.doubao.com/chat/)

解：

步骤 1：分析积分区域  $D$ ，交换积分顺序或转换为极坐标

由题可知，积分区域为：

$$D: -1 \leq x \leq 1, \quad |x| \leq y \leq \sqrt{2-x^2}$$

先画出积分区域：

- $y = |x|$  是顶点在原点、开口向上的 V 形折线；
- $y = \sqrt{2-x^2}$  是圆心在原点、半径  $r = \sqrt{2}$  的上半圆。

因此， $D$  可分为  $x \geq 0$  和  $x \leq 0$  两部分，且被积函数含  $x^2 + y^2$ ，采用极坐标计算更简便。

极坐标下：

- $x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad d\sigma = r, dr, d\theta$ ；
- $y = |x|$  对应  $\theta = \frac{\pi}{4}$  和  $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ；
- $y = \sqrt{2-x^2}$  对应  $r = \sqrt{2}$ ；
- $x = -1$  到  $x = 1$ ，且  $y \geq |x|$ ，因此  $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ ， $r$  的下限由  $y = |x|$  到  $r = \sqrt{2}$ 。

先将原积分转化为二重积分：

$$I = \iint_D y \sin \sqrt{x^2 + y^2}, d\sigma$$

步骤 2：将二重积分转化为极坐标累次积分

被积函数  $y \sin \sqrt{x^2 + y^2}$  转化为：

$$y \sin \sqrt{x^2 + y^2} = r \sin \theta \cdot \sin r$$

积分区域  $D$  在极坐标下：

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right], \quad r \in [0, \sqrt{2}]$$

(注： $y \geq |x|$  时， $r$  从 0 到  $\sqrt{2}$ ，因为  $y = |x|$  对应  $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ ，而非对每个  $\theta$  有不同的  $r$  下限)

因此，极坐标下的累次积分为：

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (r \sin \theta \cdot \sin r) \cdot r, dr$$

整理得：

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin \theta, d\theta \cdot \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sin r, dr$$

---

**步骤 3：计算关于  $\theta$  的积分**

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin \theta, d\theta = -\cos \theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

代入上下限：

$$-\cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

---

**步骤 4：计算关于  $r$  的积分（分部积分法）**

令  $J = \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sin r, dr$ ，使用两次分部积分：

**第一次分部积分：**

设  $u = r^2$ ， $dv = \sin r, dr$ ，则  $du = 2r, dr$ ， $v = -\cos r$ 。

$$\int r^2 \sin r, dr = -r^2 \cos r + 2 \int r \cos r, dr$$

**第二次分部积分：**

对  $\int r \cos r, dr$ ，设  $u = r$ ， $dv = \cos r, dr$ ，则  $du = dr$ ， $v = \sin r$ 。

$$\int r \cos r, dr = r \sin r - \int \sin r, dr = r \sin r + \cos r + C$$

因此，原积分的不定积分为：

$$\int r^2 \sin r, dr = -r^2 \cos r + 2(r \sin r + \cos r) + C = -r^2 \cos r + 2r \sin r + 2 \cos r + C$$

计算定积分  $J$ ：

$$J = [-r^2 \cos r + 2r \sin r + 2 \cos r]_0^{\sqrt{2}}$$

代入上限  $r = \sqrt{2}$ ：

$$-(\sqrt{2})^2 \cos \sqrt{2} + 2\sqrt{2} \sin \sqrt{2} + 2 \cos \sqrt{2} = -2 \cos \sqrt{2} + 2\sqrt{2} \sin \sqrt{2} + 2 \cos \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \sin \sqrt{2}$$

代入下限  $r = 0$ ：

$$-0^2 \cos 0 + 2 \cdot 0 \cdot \sin 0 + 2 \cos 0 = 2$$

因此：

$$J = 2\sqrt{2} \sin \sqrt{2} - 2$$

---

步骤 5: 合并结果, 计算  $I$

$$I = \sqrt{2} \cdot J = \sqrt{2} \cdot (2\sqrt{2} \sin \sqrt{2} - 2)$$

展开计算:

$$I = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \sin \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot 2 = 4 \sin \sqrt{2} - 2\sqrt{2}$$

---

最终答案:

$$I = 4 \sin \sqrt{2} - 2\sqrt{2}$$

---

💡 要不要我帮你补充一下交换积分顺序的直角坐标解法, 方便你对比两种方法的差异?

(注: 文档部分内容可能由 AI 生成)



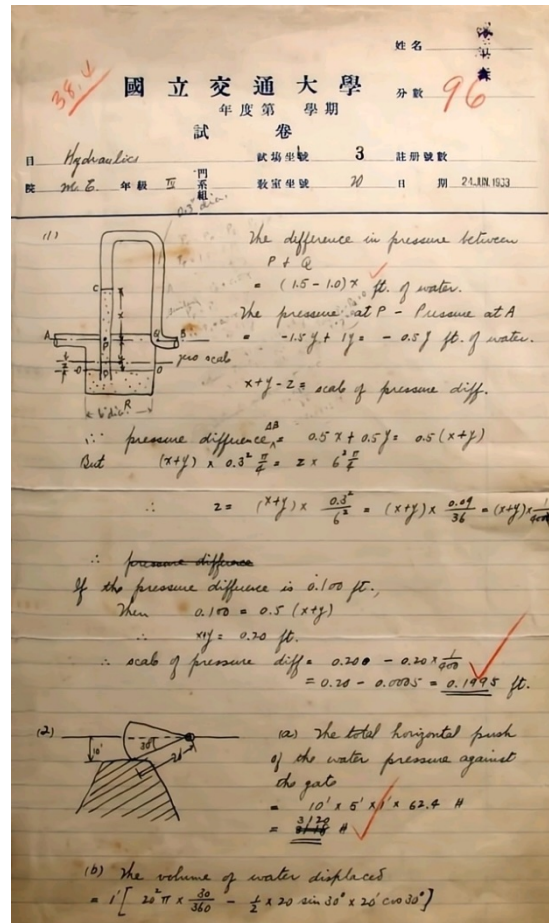
# 钱学森同志的卷子



钱学森的答卷卷面。非常清晰。

打印成纸质版，然后去描，

描完了以后抄，看一看抄的有多像。





抄钱学森同志的卷子，  
要描红摹。  
一个字儿一个字儿的描，  
不懂的就猜，  
关键在于理解它的格式。

先去打印店把它打印出来，  
然后用钢笔去描它，  
描完之后微信发给我。



## 國立交通大學

年度第 學期

## 試 卷

目 Hydraulic

試場坐號

3

註冊號數

院 M. E. 年級 IV

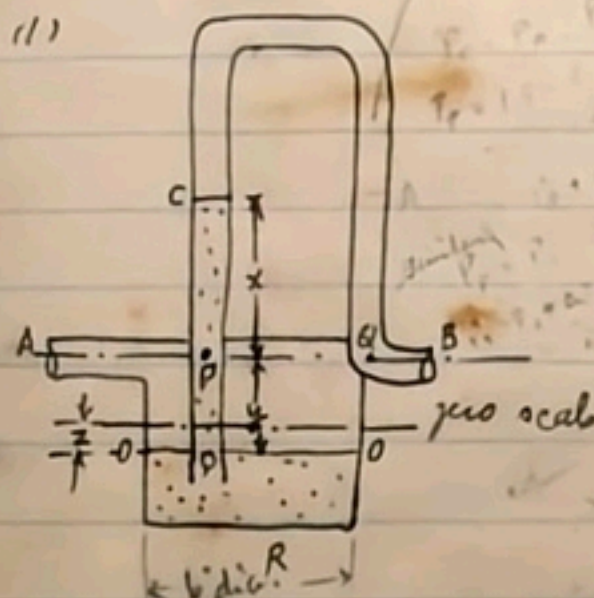
門系組

教室坐號

70

日

期 24 JUN 1933



The difference in pressure between

 $P + Q$ 

$$= (1.5 - 1.0) \times \text{ft. of water.}$$

The pressure at P - Pressure at A

$$= -1.5y + 1y = -0.5y \text{ ft. of water.}$$

$$x + y - z = \text{scal of pressure diff.}$$

$$\therefore \text{pressure difference}_{AB} = 0.5x + 0.5y = 0.5(x+y)$$

$$\text{But } (x+y) \times 0.3 \times \frac{\pi}{4} \times 6^2 = z \times \frac{\pi}{4} \times 6^2$$

$$\therefore z = (x+y) \times \frac{0.3^2}{6^2} = (x+y) \times \frac{0.09}{36} = (x+y) \times \frac{1}{400}$$

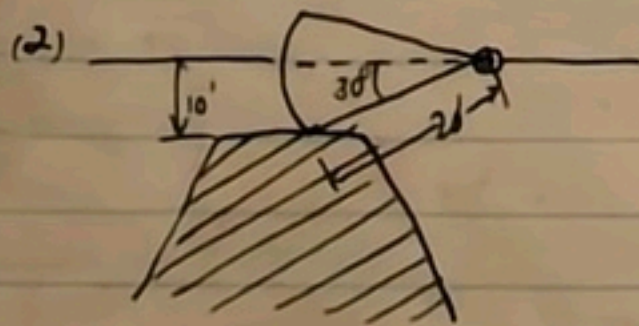
~~\therefore pressure difference~~

If the pressure difference is 0.100 ft.,

$$\text{Then } 0.100 = 0.5(x+y)$$

$$\therefore x+y = 0.20 \text{ ft.}$$

$$\therefore \text{scal of pressure diff} = 0.20 - 0.20 \times \frac{1}{400} \\ = 0.20 - 0.0005 = \underline{\underline{0.1995 \text{ ft.}}}$$



(a) The total horizontal push of the water pressure against the gate

$$= 10' \times 5' \times 1' \times 62.4 \text{ H}$$

$$= \underline{\underline{\frac{3120}{18} \text{ H}}}$$

(b) The volume of water displaced

$$= 1' \left[ 20^2 \pi \times \frac{30}{360} - \frac{1}{2} \times 20 \sin 30^\circ \times 20' \cos 30^\circ \right]$$



# 第二数学 (卷面)

那个好?

启航教育  
1.3 已知  $f(x) = e^{x^2}$ ,  $f[\varphi(x)] = 1-x$ , 且  $\varphi(x) \geq 0$ , 求  $\varphi(x)$  并写出它的定义域.

解: 因为  $f(x) = e^{x^2}$  所以  $f[\varphi(x)] = e^{[\varphi(x)]^2}$

由题知  $f[\varphi(x)] = 1-x$

即  $1-x = e^{[\varphi(x)]^2}$

$e^{\ln(1-x)} = e^{[\varphi(x)]^2}$

$\ln(1-x) = [\varphi(x)]^2$

$\varphi(x) = \pm \sqrt{\ln(1-x)}$

因为  $\varphi(x) \geq 0$

即  $\varphi(x) = \frac{1}{2} \ln(1-x)$

$\frac{1}{2} \ln(1-x) \geq 0$

$\ln(1-x) \geq 0$

$1-x \geq 1$

$x \leq 0$

即  $\varphi(x)$  的定义域为  $(-\infty, 0]$

打开试卷先找狗

卷面1

如果你是阅卷老师, 你喜欢哪一种?

启航教育  
问题: 已知  $f(x) = e^{x^2}$ ,  $f[\varphi(x)] = 1-x$

且  $\varphi(x) \geq 0$   
求  $\varphi(x)$   
并写出它的定义域

解:

① 由题意可知:  
 $f(x) = e^{x^2}$   
即  $f[\varphi(x)] = e^{[\varphi(x)]^2}$   
因为  $f[\varphi(x)] = 1-x$   
即  $e^{[\varphi(x)]^2} = 1-x$   
所以  $\varphi(x) = \pm \sqrt{\ln(1-x)}$

② 接下来求解定义域  
因为  $\varphi(x) \geq 0$   
即  $\sqrt{\ln(1-x)} \geq 0$   
所以  $x \leq 0$

综上,  $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$ , 定义域为  $(-\infty, 0]$

打开试卷先找狗

卷面2

考高等数学。

这是一道理工题，请注意问题分析的清晰度，卷面的工整性，逻辑的层次感，

比较一下这两个卷面

卷面1

已知  $f(x) = e^{g(x)}$ ,  $f[f(x)] = 1-x$ ,  $x > 0$ , 求  $f(x)$  并写  
出它的定义域.  
解: ①  $f(x) = e^{g(x)}$   
②  $f[f(x)] = e^{g[f(x)]}$   
③  $f[f(x)] = 1-x$   
④  $1-x = e^{g[f(x)]}$   
⑤  $e^{\ln(1-x)} = e^{g[f(x)]}$   
⑥  $\ln(1-x) = [g(f(x))]^2$   
⑦  $f(x) = \pm \sqrt{\ln(1-x)}$   
⑧  $f(x) > 0$   
⑨  $f(x) = \frac{1}{2} \ln(1-x)$   
⑩  $\frac{1}{2} \ln(1-x) > 0$   
⑪  $\ln(1-x) > 0$   
⑫  $1-x > 1$   
⑬  $x < 0$   
⑭  $x < 0$   
⑮ 即  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, 0)$

问题: ① 已知  $f(x) = e^{g(x)}$ ,  $f[f(x)] = 1-x$   
② 且  $f(x) > 0$   
③ 求  $f(x)$   
④ 并写出它的定义域

解:

① 由题意可知:  
 $f(x) = e^{g(x)}$   
即  $f[f(x)] = e^{g[f(x)]}$   
② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ ⑰ ⑱ ⑲ ⑳ ㉑ ㉒ ㉓ ㉔ ㉕ ㉖ ㉗ ㉘ ㉙ ㉚ ㉛ ㉜ ㉝ ㉞ ㉟ ㊱ ㊲ ㊳ ㊴ ㊵ ㊶ ㊷ ㊸ ㊹ ㊺ ㊻ ㊼ ㊽ ㊾ ㊿

卷面2

① 接下来求解定义域:  
② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ ⑰ ⑱ ⑲ ⑳ ㉑ ㉒ ㉓ ㉔ ㉕ ㉖ ㉗ ㉘ ㉙ ㉚ ㉛ ㉜ ㉝ ㉞ ㉟ ㊱ ㊲ ㊳ ㊴ ㊵ ㊶ ㊷ ㊸ ㊹ ㊺ ㊻ ㊼ ㊽ ㊾ ㊿

① 综上所述,  $f(x) = \sqrt{\ln|x-1|}$ , 定义域为  $(-\infty, 0)$

如果你是阅卷老师,  
你喜欢哪一种?



# 做法

❖ 临摹

❖ 你会抄吗? 😊



启航教育  
问题: 已知  $f(x) = e^{x^2}$ ,  $f[\varphi(x)] = 1-x$

- ① 且  $\varphi(x) \geq 0$
- ② 求  $\varphi(x)$
- ③ 并写出它的定义域
- ④

解:

① 由题意可知:

$$f(x) = e^{x^2}$$

$$\text{即 } f[\varphi(x)] = e^{[\varphi(x)]^2}$$

$$\text{因 } f[\varphi(x)] = 1-x$$

$$\text{即 } e^{[\varphi(x)]^2} = 1-x$$

$$\text{所以 } \varphi(x) = \pm \sqrt{\ln(1-x)}$$

②

接下来求解定义域

$$\text{因 } \varphi(x) \geq 0$$

$$\text{即 } \sqrt{\ln(1-x)} \geq 0$$

$$\text{所以 } x \leq 0$$

③ 综上所述,  $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$ , 定义域为  $(-\infty, 0]$

打开试卷  
先找狗

